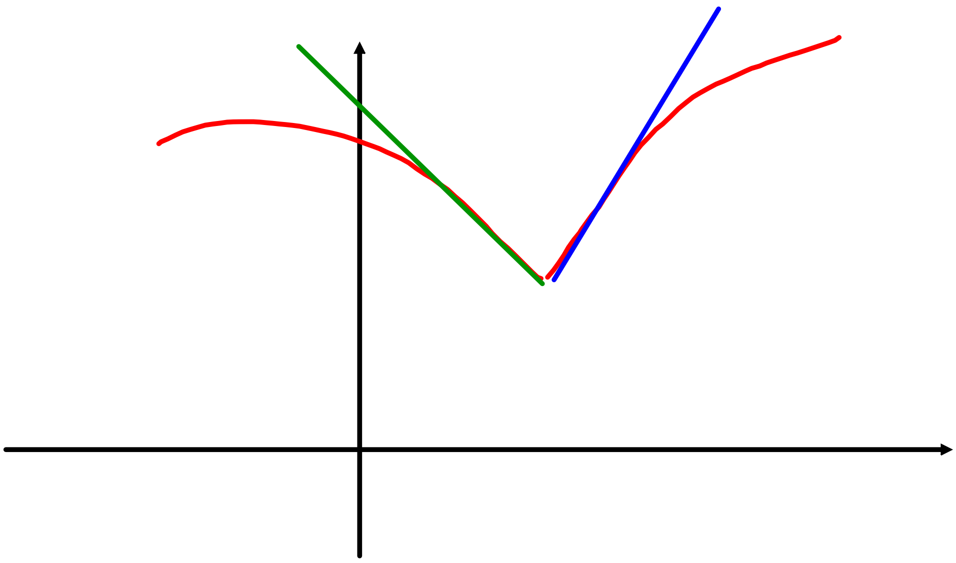
Def: Se

esistono $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$

ma $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$

e sono entrambe finite

$\Rightarrow$ x_0 si dice punto angoloso.



Def: Se f è continua in x_0

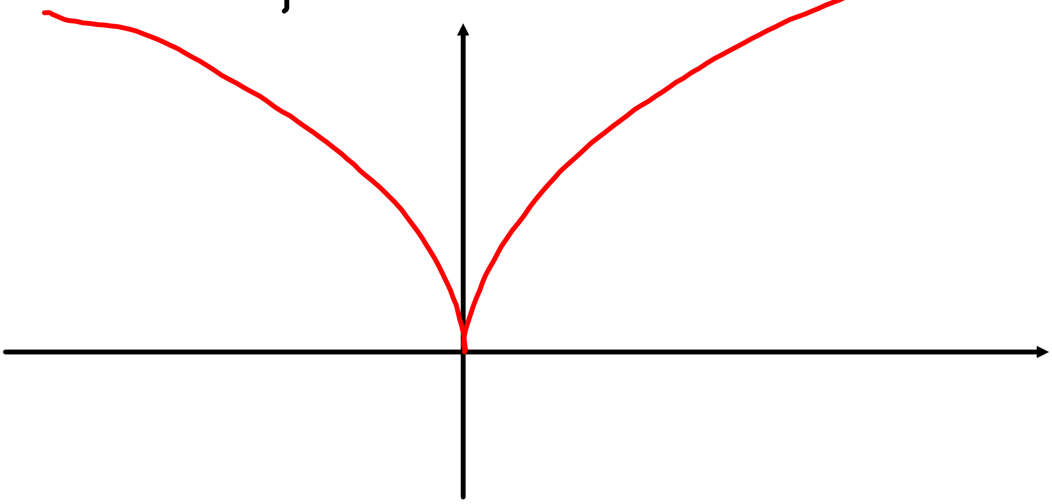
e $f'_+(x_0) = +\infty$ e $f'_-(x_0) = -\infty$

o viceversa allora x_0 si

dice punto di cuspide.

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$

f è pari



Teorema.

Se f e g sono derivabili in x_0 allora

1) $f+g$ è derivabile in x_0 e

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $f \cdot g$ è derivabile in x_0 e

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

3) se $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ è derivabile in x_0 e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}$$

Oss: Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in x_0 con $g(x_0) \neq 0$ allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}\right) =$$

$$= \frac{f'(x_n)g(x_n) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Derivata di e^x

$x_0 \in \mathbb{R}$ fissato.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0 + x - x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{x-x_0} - e^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} =$$

$x - x_0 = t$

$x \to x_0$

$\Rightarrow t \to 0$

$$= e^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} \to 1$$

$$= e^{x_0}$$

quindi

$$D(e^x) = e^x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

$$D(\sin x) = \cos x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$D(\cos x) = -\sin x \,.$$

Oss: Se f è costante allora $f'(x) = 0 \quad \forall x$.

Oss: se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$D(kf) = k\,D(f).$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{kf(x) - kf(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= k \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k f'(x_0).$$

Es: $D(-\sin x) = -\cos x$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = D(\cos x) = -\sin x$

$f'''(x) = D(-\sin x) = -\cos x$

$$f^{(4)}(x) = D(-\cos x) =$$

$$= -D(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x.$$

$$f^{(5)}(x) = f'(x)$$

in generale

$$f^{(k+4)}(x) = f^{(k)}$$

Lo stesso per $\cos x$.

$$D(\operatorname{tg} x) = D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= \frac{D(\sin x)\cdot\cos x - \sin x D(\cos x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\cdot(-\sin x)}{(\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + (\mathrm{tg}\, x)^2$$

Derivata della funzione inversa.

$f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile e strettamente monotona.

Allora f^{-1} è derivabile

e $$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{con } y = f(x).$$

quindi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Es: $f(x) = e^x$ $\quad f'(x) = e^x$

scritto $\quad y = e^x$

$x = \log y \qquad \log y = f^{-1}(y)$

$D(\log y) = D(f^{-1}(y)) =$

$$= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} =$$

$$= \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} .$$

$$D(\log y) = \frac{1}{y} .$$

Quindi la funzione $\log x$ è derivabile in tutto il suo dominio $(0, +\infty)$

e $D(\log x) = \dfrac{1}{x}$.

Prop: Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$ allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) .$$

Es: $f(x) = \sin x$ $\quad f'(x) = \cos x$

$g(y) = e^y$ $\quad g'(y) = e^y$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sin x) =$

$= e^{\sin x}$

$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) =$

$$= e^{f(x)} \cdot \cos x = e^{\sin x} \cdot \cos x$$

$$D\left(e^{\sin x}\right) = e^{\sin x} \cdot \cos x .$$

$$D(x) = 1$$

$$D(x^2) = D(x \cdot x) = x \cdot 1 + 1 \cdot x$$

$$= 2x$$

$$D(x^3) = D(x^2 \cdot x) =$$

$$= 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$$

$$D(x^n) = n x^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$
$n \geq 1.$

$D(x^\alpha) \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$

$x > 0$

$$D(x^\alpha) = D\left(e^{\log(x^\alpha)}\right) =$$

$$= D\left(e^{\alpha \log x}\right) =$$ composizione

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x}$$ derivata di $\alpha \log x$

$$= \left(e^{\log x}\right)^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} =$$

$$= \boxed{\alpha x^{\alpha-1}}$$

Es: $\alpha = \frac{1}{2}$.

$x^{1/2} = \sqrt{x}$

$D(x^{1/2}) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Es: $f(x) = a^x \qquad a > 0$

$f'(x) = ?$

$$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \cdot \log a}$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \log a} \cdot \log a =$$

$$= a^x \cdot \log a$$

Es: funzione continua senza derivata in un punto.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

f è continua in 0 ?

limitata

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$f(0)$$

f è continua in $x_0 = 0$.

È derivabile?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

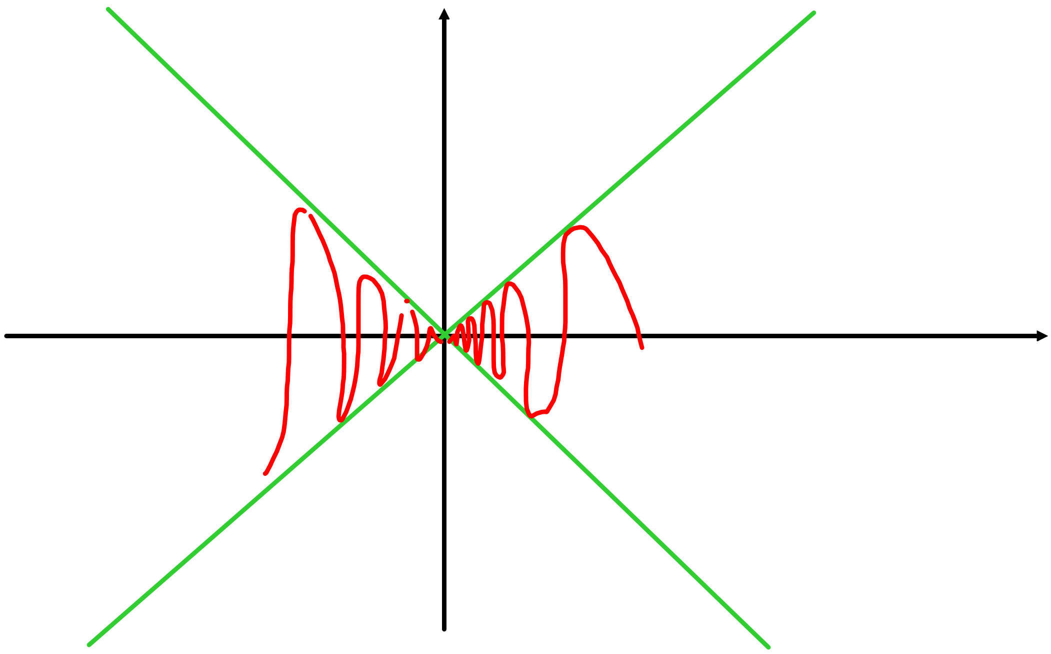
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

non esiste

$$\lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to +\infty} \sin t \leftarrow \nexists$$

$\frac{1}{x} = t$ se $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$.

quindi f non ha derivata in $x_0 = 0$.



$$-x \le x \sin \frac{1}{x} \le x \qquad x > 0$$

Es: $\boxed{D \text{ arctg}}$

$f(x) = \text{tg } x \qquad f'(x) = 1 + (\text{tg } x)^2$

$f^{-1}(y) = \text{arctg } y \quad , \quad y = \text{tg } x$

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} =$$

$$= \frac{1}{1+\left[\operatorname{tg}\left(f^{-1}(y)\right)\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} y\right)\right)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

Es: $f(x) = (1+x)^\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$x > -1$

$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$

$f(0) = 1 \quad , \quad f'(0) = \alpha$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$

$x_0 = 0 \qquad f(x) = (1+x)^\alpha$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ per $x \to 0$

Es: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} =$

$= 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ $\qquad \alpha = \frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$ $\qquad \alpha = \frac{1}{3}$

$= 1 + \frac{x}{3} + o(x)$

$\underline{E}s: \lim_{x \to \infty} \left[\sqrt[3]{x^2+8x} - \sqrt[3]{x^2} \right] x^{1/3}$

$$\left[(x^2+8x)^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= \left[\left[x^2 \left(1 + \frac{8}{x} \right) \right]^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= \left[x^{2/3} \left(1 + \frac{8}{x} \right)^{1/3} - x^{2/3} \right] x^{1/3} =$$

$$= x^1\left(\left(1+\frac{8}{x}\right)^{1/3} - 1\right) =$$

$$(1+t)^\alpha = 1+\alpha t + o(t)$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \qquad t = \frac{8}{x}$$

$$= x\left(\cancel{1} + \frac{1}{3}\frac{8}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \cancel{- 1}\right) \to \frac{8}{3}$$